Профессиональное образование
в современном мире. 2017. Т. 7. № 2. С. 1018–1022
DOI: 10.15372/PEMW20170211
ISSN 2224-1841 (печатный)

Professional education in the modern world,
2017, vol. 7, no. 2. pp. 1018–1022
DOI: 10.15372/PEMW20170211
ISSN 2224-1841 (print)

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В СИСТЕМЕ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

MODULE «MATHEMATICAL LOGICS» IN THE SYSTEM OF VOCATIONAL TRAINING

УДК 51(072)

DOI: 10.153/ PEMW20170211

В. И. Игошин

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия,
e-mail: igoshinvi@mail.ru*

Аннотация. *Статья посвящена выявлению роли курса математической логики в фундаментализации математического образования специалистов в сфере компьютерных наук и информационных технологий, обучающихся в образовательных учреждениях СПО. Колоссальные прикладные возможности математической логики проявились лишь по прошествии двух с лишним тысячелетий развития этой науки в тесном союзе с развитием математики. Предлагается организовать обучение математической логике с учетом этих двух ее сторон – теоретической как науки о способах и формах правильного мышления и прикладной как инструмента для конструирования компьютеров и создания программного обеспечения к ним. Основой для такого образовательного подхода может послужить только что вышедший учебник автора «Элементы математической логики».*

Ключевые слова: *содержательная математическая логика, формальная математическая логика, содержательные аксиоматические теории, формальные аксиоматические теории, булевы функции, дискретные преобразователи информации.*

Для цитаты: *Игошин В. И.* Курс математической логики в системе среднего профессионального образования // Профессиональное образование в современном мире. Т. 7. 2017. № 2. С. 1018–1022. DOI: 10.153/ PEMW20170211

Igoshin, V. I.

*Saratov National Research State University named after N. G. Chernyshevsky, Department of Mathematics and Mechanics, Saratov, Russia.
E-mail: igoshinvi@mail.ru*

Abstract. *The article focuses on the role of the module on Mathematical logics in fundamentalization of mathematical education of specialists in the field of computer science and information technology who get vocational education. Enormous applied capacities of mathematical logics were revealed only after more than two centuries of this science development in close relation with mathematics development. The author offers to arrange training of Mathematical logics taking into account two sides of the science as with those two sides. These sides imply a theoretical science as a science about the ways and forms of correct thinking and applied science as a tool for designing computers and creating software for them. This approach can be based on the student book prepared by the author of the article "Elements of mathematical logics".*

Key words: *meaningful mathematical logics, formal mathematical logics, meaningful axiomatic theories, formal axiomatic theories, Boolean functions, discrete transmitters of information.*

For quote: *Igoshin V. I.* [Module «mathematical logics» in system of vocational training]. *Professionalnoe obrazovanie v sovremenom mire = Professional education in the modern word*, 2017, Vol. 7, no 2, pp. 1018–1022. DOI: 10.153/ PEMW20170211

Введение. Важнейшими фундаментальными компонентами профессиональных компетенций в сфере компьютерных наук и информационных технологий являются знания и умения в области математической логики и теории алгоритмов. В настоящее время специалисты в сфере компьютерных наук и информационных технологий на уровне бакалавриата готовятся не только в высших учебных заведениях (университетах), но и в образовательных учреждениях среднего профессионального образования (колледжи, техникумы). Чрезвычайно важно, чтобы их уровень подготовки в указанных областях соответствовал современным требованиям, выраженным в Федеральном государственном образовательном стандарте среднего профессионального образования по соответствующему профилю.

Конечно, специалиста в области информационно-компьютерных технологий интересуют прежде всего прикладные возможности математической логики. И эти возможности действительно велики и многогранны. Причем, проявлены они были во второй половине XX в., по существу, сразу же после того, как математическая логика окончательно сформировалась как фундаментальный раздел математической науки. Более того, математическая логика стала рассматриваться как основополагающий раздел глобального направления в математической науке, сформировавшегося в XX в. и получившего название дискретная математика. Наконец, и дискретная математика включилась в поток под названием «компьютер сайенс» (computer science) – науки, связанные с компьютерами. Все эти характеризации математической логики как научной дисциплины основаны именно на ее прикладных возможностях.

Создание компьютеров (электронно-вычислительных машин, ЭВМ), произведших в XX в. очередную научно-техническую революцию на пути развития человечества, в значительной мере основано на прикладных возможностях именно математической логики. По существу, математическая логика в XX в. явилась главной прикладной математической дисциплиной подобно тому, как в XIX в. такой главной прикладной математической дисциплиной был математический анализ. И если в XIX в. явления природы рассматривались математикой и соответствующие математические модели строились с точки зрения парадигмы непрерывности, то в веке XX-м на передний план выступила парадигма дискретности, а главным объектом исследования математической науки стала информация. И вот здесь именно математическая логика позволила в XX в. приступить к созданию теоретических методов и практических аппаратов (компьютеров) для анализа и обработки информации.

Существо теоретических методов основывается на созданных математической логикой логико-математических и логико-алгоритмических языках, а также на логических исчислениях, образовавших теоретический фундамент для теории и практики программного обеспечения и программирования, обеспечивших управление компьютерами (компьютерные «мозги») – аппаратами для обработки информации. Физическое конструирование компьютеров (компьютерное «железо») также основывается на методах математической логики – теории булевых функций и дискретных преобразователей информации (релейно-контактных и функциональных схем).

Постановка задачи. Чтобы понять и осознать существо силы прикладных методов математической логики, необходимо проследить, какие практические потребности и задачи привели к созданию этой науки, как она возникла и развивалась.

Подобно тому, как арифметика возникла из потребности человечества считать, геометрия – измерять, так и логика была призвана решать еще одну практически важную для человечества задачу – исследовать процесс человеческого мышления. Логика как наука началась с практического анализа мыслительного процесса, что гениально проделал Аристотель (384–322 гг. до Р.Х.), построив почти математическую модель этого процесса, которая две с лишним тысячи лет верой и правдой служила развитию всей последующей европейской научной цивилизации. Затем логика вошла в математику, превратив ее в логичнейшую из наук и, наконец, сама, приняв математический облик и став *математической* логикой, получила теоретические и прикладные результаты необычайной силы и значимости.

Один из постулатов теории развивающего обучения гласит: обучение будет развивающим, если оно в сжатой, сокращенной форме воспроизводит действительный исторический процесс рождения и становления знаний. Анализируя более чем двухтысячелетнюю историю развития логики и математической логики, современное ее состояние можно представить в виде трехэтажного здания, каждый этаж которого разделен на два крыла. Этажи представляют собой три грандиозных раздела математической логики, сформировавшихся на последовательных этапах развития и становления данной науки. Это – теория высказываний – первый, самый нижний этаж; далее, теория предикатов; и, наконец, – теория аксиоматических теорий, или метатеория – третий, самый верхний этаж. Крылья этих этажей суть подходы, выработанные математической логикой к изучению этих разделов. Таких подходов два – содержательный (или семантический) и формальный (или синтаксический).

Содержательный (или семантический) подход происходит из практического анализа содержательных рассуждений, начало которому и положил Аристотель, и из такого анализа возникли алгебра высказываний (АВ), логика предикатов (ЛП) и содержательные аксиоматические теории (САТ), располагающиеся в левых крыльях трех этажей здания математической логики. При таком подходе к логике основными атрибутами являются понятия «*истина (1)* » и «*ложь (0)*».

Напротив, подход формальный (или синтаксический) представляет собой как бы полную противоположность подходу содержательному. Он возник уже, когда содержательный подход был в достаточной мере сформирован практикой, и возник он чисто теоретически, в полном отрыве от практики. Этот подход сформировал правые крылья на трех этажах здания математической логики – формализованное исчисление высказываний (ФИВ), формализованное исчисление предикатов (ФИП) и формальные аксиоматические математические теории (ФАМТ). Таким образом, формальный подход есть порождение теории. Основным понятием при таком подходе является понятие доказуемости.

Как известно, вопрос «*Что есть истина?*» был задан почти 2 тыс. лет назад. Тогда же на него и был дан ответ. Несколько позже об истине был задан другой вопрос: «*Доказуема ли истина?*» Ответ на него оказался не таким простым, и в полной мере на него смогла ответить именно математическая логика. Этот вопрос как бы соединил два крыла на каждом этаже грандиозного здания математической логики. Пройдемся по его этажам. На первых двух ответ на последний вопрос оказался положительным: две теоремы полноты в каждой из теорий – высказываний и предикатов – установили, что доказуемыми в правых крыльях соответствующего этажа являются те и только те предложения, которые содержательно истинны в левом крыле того же этажа.

Сложнее всего обстановка сложилась на третьем этаже. Это и понятно. Здесь математическая логика добралась до анализа математическими методами не самое себя, как это было на первых двух этажах, а математических теорий и, более того, всей математической науки в целом. Ответ, данный в 1930 г. в теоремах К. Гёделя, оказался обескураживающим: существуют математические теории, в которых не все истинные утверждения могут быть доказаны, а также непротиворечивость некоторых математических теорий не может быть доказана ее собственными методами.

Еще в XVII в. Г.– В. Лейбниц мечтал о создании машины, которая если бы и не доказывала истинные утверждения, то хотя бы давала ответ на вопрос, доказуемо или нет то или иное утверждение. В правом крыле третьего этажа здания математической логики был дан ответ и на этот вопрос: в 1936 г. А. Тьюринг, введя строгое понятие алгоритма, доказал, что существуют массовые проблемы, которые не имеют алгоритма для своего решения, откуда и вытекало отсутствие машины (алгоритма), распознающей доказуемые утверждения в математических теориях. Такие теории стали называться неразрешимыми. В том же году А. Тарский доказал, что если теория, содержащая арифметику, непротиворечива, то понятие истины не может быть выражено на языке этой теории.

Эти теоремы К. Гёделя, А. Тьюринга и А. Тарского, представляющие собой высокие достижения математической логики и располагающиеся в правом крыле ее верхнего этажа, доказаны с использованием методов теории алгоритмов. Более того, неразрешимыми оказались не только некоторые математические теории, но чисто логическая теория – формализованное исчисление предикатов (ФИП располагается в правом крыле второго этажа), что доказал А. Чёрч в 1936 г. При этом он также использовал методы теории алгоритмов. Так что эти две теории – математическая логика и теория алгоритмов (здание которой в процессе обучения строится рядом со зданием математической логики) – вступают в самое что ни на есть плодотворнейшее взаимодействие на своих самых верхних этажах [2; 3; 4; 5].

Результаты. Именно в соответствии с изложенной концепцией автором написан, а издательским центром «Академия» опубликован учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования [1].

Данный учебник состоит из трех частей, введения и заключения.

Во введении кратко характеризуется исторический путь взаимодействия математики и логики в процессе их развития. Математика и логика на протяжении многих веков развиваются в теснейшем взаимодействии друг с другом. Более того, это их взаимодействие собственно и обуславливает эффективное и поступательное развитие каждой из этих областей знаний, поочередно периодически вызывая кризис в каждой из них и затем способствуя его преодолению. Кризисы были связаны с тем, что накопленные к этому моменту математические результаты не укладывались в традиционно сложившиеся допустимые рамки способов рассуждений и представлений о порядке вещей. Для преодоления возникших трудностей приходилось коренным образом перерабатывать общие основы и методологию практически всех математических теорий и, конечно, анализировать логические методы рассуждений и доказательств, логические основания математической науки. Развивающаяся математика выдвигала все новые и новые критерии строгости математических доказательств, стимулируя логику к ее развитию. В то же время развивающаяся логика помогала математикам находить выходы из возникавших математических тупиков, куда они попадали, следуя по лабиринтам логических рассуждений.

Поскольку этот материал помещен во введении к учебнику по математической логике, при первом его чтении многое может оказаться в нем непонятным. Тем не менее по мере изучения курса студент может обращаться к этому введению с тем, чтобы логические знания формировались на историческом фоне их возникновения.

В части I математизированными методами изучаются аристотелевские суждения и умозаключения, берущие свое происхождение из практики мышления. При этом, в соответствии с Аристотелем, рассматриваются суждения двух типов – простые и имеющие субъектно-предикатную структуру. Первым посвящается глава 1 «Алгебра высказываний», вторым – глава 3 «Логика предикатов». Между ними располагается глава 2, в которой логика наиболее ярко на этом уровне проявляет свой математический характер. Здесь логика как бы отрывается от своего первоисточника – мыслительных процессов и начинает развиваться уже по внутренним законам математики. В итоге на свет появляется теория булевых функций, которая становится математической теорией дискретных преобразователей информации, оказавшейся чрезвычайно важной для конструирования компьютеров и для информатики. Таким образом, содержание части I представляет собой своего рода первый уровень современной математической логики, наполненный практическим содержанием и смыслом, связанным с реальными мыслительными процессами. Поэтому эта часть названа содержательной (семантической) логикой. Некоторые ее фрагменты изучаются уже в современной средней школе, в частности, на уроках информатики.

Часть II посвящена формальной (синтаксической) математической логике. В ней к содержательным логическим теориям высказываний и предикатов, построенным в предыдущей части, осуществляется аксиоматический подход, т.е. *примерно* такой же подход, какой используется при строгом построении геометрии на базе какой-либо системы аксиом, например, Гильберта, Вейля или какой-либо другой. *Примерно*, потому что строгость построения аксиоматических теорий высказываний и предикатов будет значительно выше: они предстанут как формальные аксиоматические теории, в них будут строго определены понятия доказательства и доказуемого утверждения (теоремы этой теории). Апофеозом этой части станут теоремы о полноте построенных формальных аксиоматических теорий. Они будут утверждать, что множество теорем каждой из этих формальных аксиоматических теорий совпадает с множеством содержательно истинных утверждений содержательных прообразов этих теорий – алгебры высказываний и логики предикатов соответственно, для которых эти аксиоматические теории стали формализациями. Это будет означать, что построенные формализации адекватно отражают соответствующие содержательные теории.

В части III математическая логика достигает такого уровня, для которого она собственно и создавалась: она вступает в соединение с математикой, математическими теориями и начинает исследовать их своими, математико-логическими, методами. Возникают аксиоматические математические теории. Сначала (глава 6) эти теории рассматриваются на содержательном уровне с использованием методов содержательной (семантической) математической логики. В главе 7 аксиоматические математические теории рассматриваются с точки зрения формальной (синтаксической) математической логики – формализованных исчислений высказываний и предикатов, построенных в предыдущей части II, и принимают характер формальных аксиоматических математических теорий. На этом уровне математическая логика исследует общие свойства формальных аксиоматических математических теорий, важнейшим из которых является непротиворечивость теории, возможности этих теорий и ограничения, а также связи между формальными теориями и их содержательными интерпретациями.

В заключение подводится определенный методологический итог курса математической логики – как изучать математику и как обучать математике после изучения курса математической логики, а также – что же должен уяснить и как должен действовать дальше будущий специалист после знакомства с этим курсом в плане последующего изучения математики и информатики [8; 9; 10; 11].

При изучении данного курса в качестве сборника задач рекомендуется использовать пособия автора [6; 7].

Выводы. Таким образом, курс математической логики играет важную методологическую роль в фундаментализации математического образования будущих специалистов в области программирования и информационных технологий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Игошин В. И.** Элементы математической логики. М.: Издат. центр «Академия», 2016.
2. **Игошин В. И.** Математическая логика и теория алгоритмов. М.: Изд. центр «Академия», 2004. (переизд. 2008, 2008, 2010).
3. **Игошин В. И.** Математическая логика. М.: ИНФРА-М, 2012.
4. **Игошин В. И.** Теория алгоритмов. М.: ИНФРА-М, 2012.
5. **Игошин В. И.** Теория алгоритмов. М.: Издательский центр «Академия», 2013.
6. **Игошин В. И.** Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. М.: Издат. центр «Академия», 2005, 2006 (2-е изд.), 2007 (3-е изд.), 2008 (4-е изд.).
7. **Игошин В. И.** Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов. М.: КУРС; ИНФРА-М, 2017.
8. **Игошин В. И.** Математическая логика как педагогика математики. Саратов: Изд-во ООО «Издательский центр «Наука», 2009.
9. **Игошин В. И.** Математическая логика в обучении математике. Логико-дидактическая подготовка учителя математики.– Saarbrüken, Deutschland / Германия: Palmarium Academic Publishing, 2012.
10. **Игошин В. И.** Логика с элементами математической логики. Саратов: Научная книга, 2004.
11. **Игошин В. И.** Дидактическое взаимодействие логики и математики // Педагогика. 2002. № 1. С. 51–55.

REFERENCES

1. **Igoshin V. I.** *Elementy matematicheskoy logiki.* [Elements of mathematical logic]. Moscow, 2016. (In Russian)
2. **Igoshin V. I.** *Matematicheskaya logika i teoriya algoritmov.* [Mathematical logic and theory of algorithms]. Moscow, 2010. (In Russian)
3. **Igoshin V. I.** *Matematicheskaya logika.* [Mathematical logic]. Moscow, 2012. (In Russian)
4. **Igoshin V. I.** *Teoriya algoritmov.* [Theory of algorithms]. Moscow, 2012. (In Russian)
5. **Igoshin V. I.** *Teoriya algoritmov.* [Theory of algorithms]. Moscow, 2013. (In Russian)
6. **Igoshin V. I.** *Zadachi i uprazhneniya po matematicheskoy logike i teorii algoritmov.* [Problems and exercises on mathematical logic and theory of algorithms]. Moscow, 2008. (In Russian)
7. **Igoshin V. I.** *Sbornik zadach po matematicheskoy logike i teorii algoritmov.* [Collection of problems on mathematical logic and theory of algorithms]. Moscow, 2017. (In Russian)
8. **Igoshin V. I.** *Matematicheskaya logika kak pedagogika matematiki.* [Mathematical logic as pedagogic of mathematics]. Saratov, 2009. (In Russian)
9. **Igoshin V. I.** *Matematicheskaya logika v obuchenii matematike. Logiko-didakticheskaya podgotovka uchitelia matematiki.* [Mathematical logic in teaching mathematics]. Saarbrüken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2012. (In Russian)
10. **Igoshin V. I.** *Logika s elementami matematicheskoy logiki.* [Logic with elements of mathematical logic]. Saratov, 2004. (In Russian)
11. **Igoshin V. I.** *Didakticheskoe vzaimodeistvie logiki i matematiki.* [Didactic interaction of logic and mathematics]. *Pedagogika*. [Pedagogy]. 2002. № 1. P. 51–55. (In Russian)

Информация об авторе

Игошин Владимир Иванович – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, механико-математический факультет, кафедра геометрии, профессор кафедры геометрии (410012 г. Саратов, ул. Астраханская, 83, e-mail: igoshinvi@mail.ru).

Принята редакцией 29.01.2017

Information about the authors

Vladimir I. Igoshin – Saratov, Russian Federation, Doctor Pedagogical Sc., Candidate of Physics and Mathematics, Professor at the Chair of Geometry, Faculty of Mathematics and Mechanics at Saratov National Research State University named after N. G. Chernyshevsky, Postal address: 410056 Saratov, 83 Astrakhanskaya Str. tel.: 8-906-3056444; e-mail: igoshinvi@mail.ru

Received 29 January 2017